

# TD EM 1

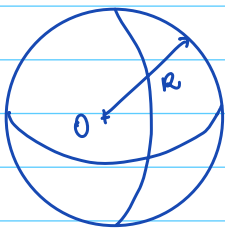
SF 1

cf cours

SF 2

Module 1

On considère une sphère de masse volumique uniforme  $\rho_0$   
On utilisera les coordonnées sphériques



+ n

Tous les plans contenant le vecteur  $\vec{O}n$  sont  
plans de symétrie pour la distribution de masse  
Donc  $\vec{g}(n) = g(n)\vec{u}_r$

Par ailleurs la masse volumique est indépendante  
de  $\theta$  et  $\varphi$ , donc  $\vec{g}(n) = \vec{g}(r)$

au final  $\vec{g}(n) = g(r)\vec{u}_r$ .

On choisit comme surface de Gauss la sphère de centre O et de  
rayon  $r$ .

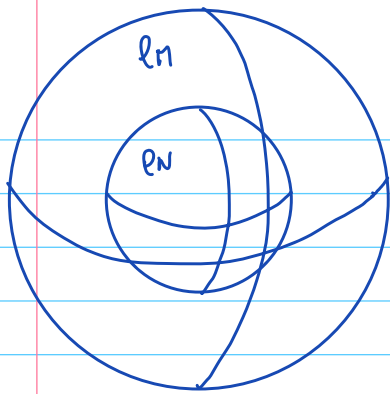
$$\text{On a } \oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3}\pi R^3 & \text{si } r > R \\ -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r < R \end{cases}$$

Ainsi

$$\vec{g}(n) = \begin{cases} -G \frac{4}{3}\pi \rho_0 \frac{R^3}{r^2} \vec{u}_r & \text{si } r > R \\ -G \frac{4}{3}\pi \rho_0 r \vec{u}_r & \text{si } r < R. \end{cases}$$

## Modèle 2



L'étude des invariances et symétrie est la même

$$\vec{g}(r) = g(r) \vec{u}_r$$

On choisit donc la même surface de Gauss

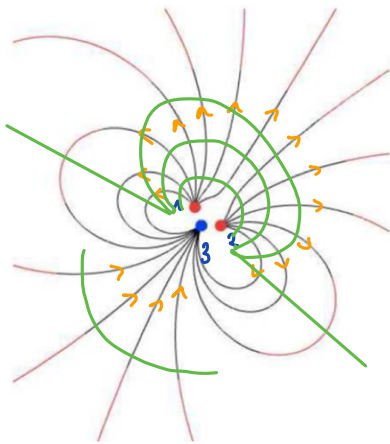
$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \rho_{int}$$

$$4\pi r^2 g(r) = \begin{cases} -4\pi G \rho_N \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r < R_N \\ -4\pi G \left( \rho_N \frac{4}{3}\pi R_N^3 + \rho_n \frac{4}{3}\pi (r^3 - R_N^3) \right) & \text{si } R_N < r < R_n \\ -4\pi G \left( \rho_N \frac{4}{3}\pi R_N^3 + \rho_n \frac{4}{3}\pi (R_n^3 - R_N^3) \right) & \text{si } r > R_n \end{cases}$$

au final

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} -G \rho_N \frac{4}{3}\pi r \vec{u}_r & \text{si } r < R_N \\ -G \frac{4}{3}\pi \left( (\rho_N - \rho_n) \frac{R_N^3}{r^2} + \rho_n r \right) \vec{u}_r & \text{si } r \in [R_N, R_n] \\ -G \frac{4}{3}\pi \frac{1}{r^2} \left( (\rho_N - \rho_n) R_N^3 + \rho_n R_n^3 \right) \vec{u}_r & \text{si } r > R_n. \end{cases}$$

## SF3



1) On voit qu'aucune ligne de champ ne relie 1 et 2 qui sont donc probablement de même charge  
1 et 2 sont donc les H  
3 est donc le O

2) les lds vont des charges positives vers les négatives  
O est beaucoup plus électro-négatif que H

3) les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

## Exercice 3 - Cylindres concentriques

1) des plans  $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$  et  $(N, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  sont plans de symétrie de la distribution.  
On a donc  $\vec{E}(n) = E(n) \vec{u}_r$ .

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation selon  $(O, \vec{u}_z)$  et par rotation autour de  $(O, \vec{u}_z)$ , donc  $\vec{E}(n) = E(n) \vec{u}_r$ .

On considère le cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Appliquons le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{lat}} E(n) dS + \iint_{\text{disque haut}} E(n) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\text{bas}} E(n) \vec{u}_r \cdot dS (-\vec{u}_z) \\ &= 2\pi r h E(n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et si } r < R_1, \quad Q_{\text{int}} &= \int_{r=0}^{r=r} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h -\alpha r' dr' d\theta dz \\ &= -2\pi h \alpha \int_0^r r'^2 dr' = -2\pi h \alpha \left[ \frac{1}{3} r'^3 \right]_0^r \end{aligned}$$

$$\text{si } r < R_1, \quad Q_{\text{int}} = -\frac{2\pi}{3} h \alpha r^3.$$

$$\bullet \text{ si } r \in [R_1, R_2[ \quad Q_{\text{int}} = -\frac{2}{3} \pi h \alpha R_1^3$$

$$\bullet \text{ si } r > R_2, \quad Q_{\text{int}} = -\frac{2\pi}{3} h \alpha R_1^3 + 2\pi h R_2 \sigma$$

Au final :

$$\vec{E}(n) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} r^2 \vec{u}_r & \text{si } r < R_1 \\ -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r} \vec{u}_r & \text{si } r \in [R_1, R_2[ \\ \left( -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{r} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0 r} \right) \vec{u}_r & \text{si } r > R_2. \end{cases}$$

$$2) \text{ en } r = R_1 : \vec{E}(R_1^-) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} R_1^2 \vec{u}_r$$

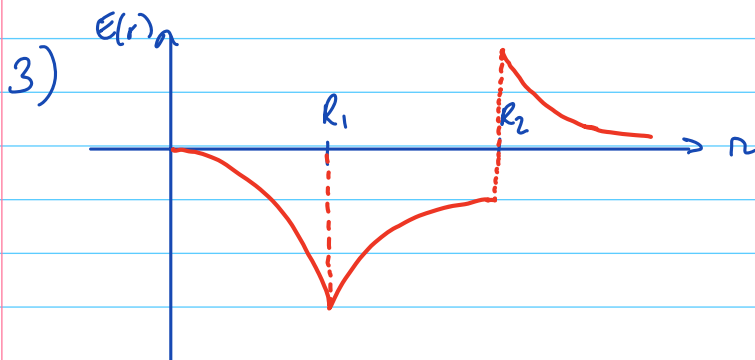
$$\vec{E}(R_1^+) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_1} \vec{u}_r = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} R_1^2 \vec{u}_r$$

$\rightarrow \vec{E}$  est continue en  $R_1$ , logique car la distribution est volumique.

$$\text{en } r = R_2 : \vec{E}(R_2^-) = -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(R_2^+) = \left( -\frac{\alpha}{3\epsilon_0} \frac{R_1^3}{R_2} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \vec{u}_r$$

$\vec{E}$  est discontinue en  $R_2$ , logique car la distribution est alors surfacique.



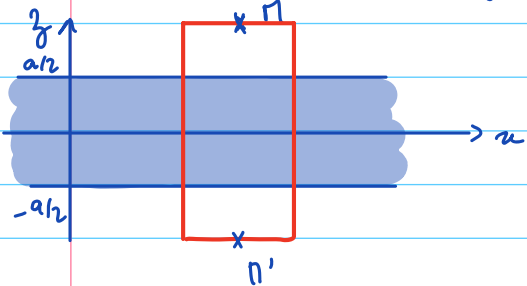
## Exercice 4 - Plan epais

1) Tous les plans contenant  $(\vec{n}, \vec{u}_z)$  sont plans de symétrie, donc  
$$\vec{E}(\vec{n}) = E(\vec{n}) \vec{u}_z$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$   
donc  $\vec{E}(\vec{n}) = \vec{E}(z)$

au final 
$$\vec{E}(\vec{n}) = E(z) \vec{u}_z$$

2) Considérons un cylindre de rayon  $R$ , d'axe  $(\vec{n}, \vec{u}_z)$  et tel que  
 $\Pi$  et  $\Pi'$  soient sur les disques aux extrémités



On a 
$$\phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{haut}} E(z) \cdot dS + \iint_{\text{bas}} -E(-z) \cdot dS$$

or le plan  $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  est plan de symétrie pour la distribution et on a montré que  $\vec{E}$  est parallèle à  $\vec{u}_z$   
Ainsi 
$$E(z) = -E(-z)$$

et 
$$\phi_E = 2\pi R^2 E(z)$$

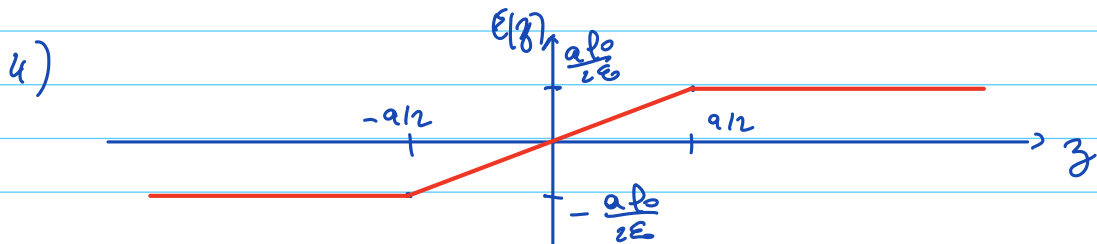
Par ailleurs 
$$Q_E = \begin{cases} \pi R^2 a \rho_0 & \text{si } |z| > \frac{a}{2} \\ \pi R^2 2z \rho_0 & \text{si } |z| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Au final, on a donc

$\vec{E}(\vec{n}) =$	}	$\frac{a \rho_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	si	$z > \frac{a}{2}$
		$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \vec{u}_z$	si	$-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}$
		$-\frac{a \rho_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	si	$z < -\frac{a}{2}$

3) On a montré que  $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$

C'est logique car on a  $\vec{E}$  perpendiculaire à  $\vec{u}_z$ , mais le plan  $(xOy)$  étant plan de symétrie, si  $n \in (xOy)$ ,  $\vec{E}(n) \in (xOy)$ . Pour avoir simultanément  $\vec{E}(z=0) \in (xOy)$  et  $\vec{E}(z=0) \parallel \vec{u}_z$ , il faut  $\vec{E}(z=0) = \vec{0}$ .



Le champ est continu en  $z = \pm a/2$ , ce qui est cohérent avec une modélisation de distribution de charge volumique.

5) On veut que  $\sigma_0 S = a S \rho_0$

$$\text{Donc } \sigma_0 = a \rho_0$$

On a alors pour le champ  $\vec{E}$ :

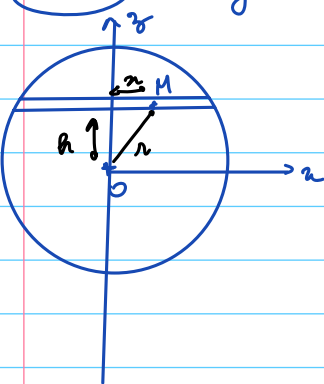
$$\vec{E}(n) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (\text{oh! résultat du cours!})$$

6) On a maintenant une discontinuité de  $\vec{E}$  en  $z=0$ , logique avec une modélisation de distribution de charge surfacique

## Exercice 5 - Tunnel dans la Terre

1) Le tunnel est de faible section donc on peut négliger son impact sur  $\vec{g}$ .

SF2  $\rightarrow \vec{g}(r) = -G \frac{4\pi r \rho}{3} \vec{u}_r = -g_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r$  car  $g_0 = G \frac{4\pi R \rho}{3}$



Dans le tunnel, on a  $r = \sqrt{x^2 + h^2}$   
Donc on peut écrire  
 $\vec{g}_{\text{tunnel}}(x) = -g_0 \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{R} \vec{u}_r$

2) La masse est soumise à :

- \* la force de gravitation  $\vec{F} = m\vec{g}(M)$
- \* la réaction du tunnel  $\vec{R} = R_N \vec{u}_z$

On a donc, d'après la 2<sup>de</sup> loi appliquée à la masse :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R}$$
$$\text{/} \vec{u}_x \quad m\ddot{x} = m\vec{g} \cdot \vec{u}_x = -m g_0 \frac{r}{R} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x$$

$$\text{or } r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_x = x$$

$$\text{On a donc } m\ddot{x} = -m g_0 \frac{x}{R}$$

$$\text{il } \ddot{x} + \frac{g_0}{R} x = 0$$

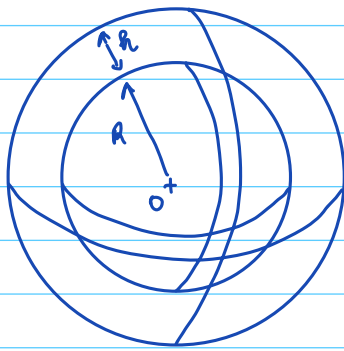
On reconnaît un oscillateur harmonique. On peut poser  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$

La masse a donc un mouvement d'oscillation autour de  $x=0$  à une pulsation  $\sqrt{\frac{g_0}{R}}$ .

3) Il faudrait ajouter des forces d'entraînement, mais c'est hors programme!



## Exercice 6 - Puissance transportée par un éclair



1) On se place en coordonnées sphériques

des plans  $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  et  $(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$  sont plans de symétrie. Donc  $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$

Par ailleurs, la distribution est invariante par rotation autour de O

Donc  $\vec{E}(r) = \vec{E}(r)$

Au final  $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}_r$ .

On choisit comme surface de Gauss la sphère de rayon  $r$  et de centre O.

$$\text{On a } \Phi_{\vec{E}} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

$$\text{Et } Q_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ -Q & \text{si } r \in [R, R+h] \\ 0 & \text{si } r > R+h \end{cases}$$

$$\text{On a donc } \vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < R \\ -\frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r & \text{si } r \in [R, R+h] \\ \vec{0} & \text{si } r > R+h \end{cases}$$

$$2) \text{ On a } \vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

d'ionosphère correspond à  $r = R+h$ . On peut y écrire

$$-\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Donc } V(r) = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \text{cte}$$

$$\text{Or } V(R) = 0, \text{ donc } -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} + \text{cte} = 0$$

$$\text{Ainsi } \forall r \in [R, R+h], V(r) = -\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

En particulier  $V(R+h) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right)$

$$V(R+h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{R(R+h)}$$

3) Par définition  $C = \frac{Q}{V-0} = \frac{R(R+h)}{h} 4\pi\epsilon_0$

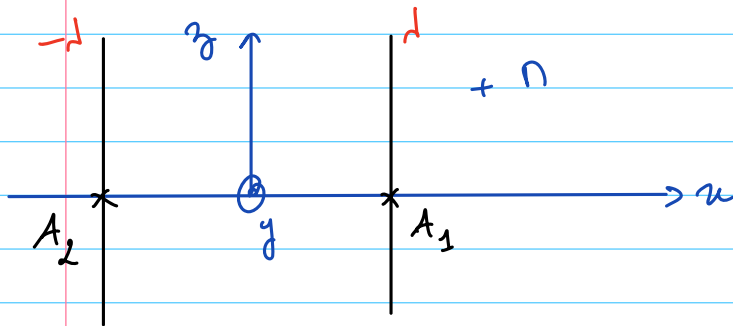
4) On a  $R+h \approx R$ , donc  $C = \frac{R^2}{h} 4\pi\epsilon_0 = \underline{7,6 \cdot 10^{-5} \text{ F}}$

On reconnaît l'expression de  $C$  pour des plans infinis.  $h$  est assez petit devant  $R$  pour qu'on ne "voit pas" la courbure de la Terre.

5) On a  $\mathcal{P} = U \times I = V \times I = \frac{Q}{C} \times I = \frac{I \Delta t}{C} \times I = \underline{3 \cdot 10^{11} \text{ W}}$

↑  
ici, on suppose que l'éclair de charge entièrement l'ionosphère c'est peu probable, mais on n'a pas d'autre info.

## Exercice 7 - Lecture de carte de champ



1) On considère un fil seul sur l'axe ( $Oz$ ) portant la distribution linéique  $\lambda$ .

Dans le repère cylindrique, on a les plans  $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  et  $(r, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  plans de symétrie de la distribution de charge. Ainsi  $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$ .

Pas ailleurs, la distribution est invariante par translation selon  $\vec{e}_z$  et par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ). Donc  $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

On considère un cylindre fermé de hauteur  $h$ , d'axe ( $Oz$ ) et de rayon  $r$  comme surface de Gauss.

$$\text{On a } \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 2\pi r h$$

$$\text{or } Q_E = \lambda h$$

$$\text{On a donc } E(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \text{ or } E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \text{ et enfin } \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} \vec{e}_r$$

2) Pour un seul fil, on a  $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$\text{ie } \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = -\frac{dV}{dr} \text{ or } V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r + \text{cte}$$

Ainsi le potentiel créé par un fil ne dépend que de la distance du point  $P$  au fil.  
On a donc

$$V_1(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r_1 + \text{cte} \text{ or } V_1(a) = 0 = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln a + \text{cte}$$

$$\text{donc } V_1(r) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left( \frac{r_1}{a} \right)$$

$$\text{or } V_2(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln r_2 + \text{cte}' = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left( \frac{r_2}{a} \right) \text{ de même.}$$

Par théorème de superposition,  $V(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left( \ln\left(\frac{r_2}{a}\right) - \ln\left(\frac{r_1}{a}\right) \right)$

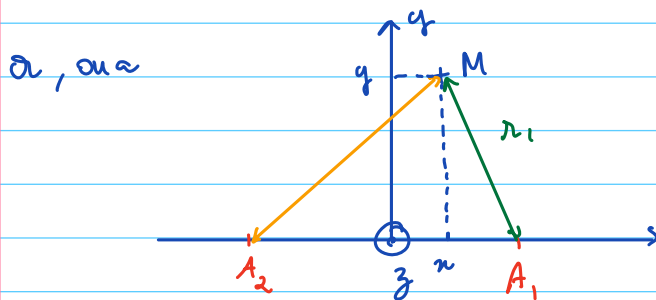
$$V(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3) Soit M tq  $V(r) = V_0$

$$\text{ic } \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_0$$

$$\text{ic } \frac{r_2}{r_1} = k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{1}\right)$$

$$\text{ic } r_2 = k r_1$$



$$\text{ic } r_1 = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{y^2 + (x+a)^2}$$

$$\text{On a donc } y^2 + (x+a)^2 = k^2 (y^2 + (x-a)^2)$$

$$\text{ic } y^2(1-k^2) + x^2 + 2ax + a^2 - k^2x^2 + 2k^2ax - k^2a^2 = 0$$

$$y^2(1-k^2) + (1-k^2)x^2 + (1+k^2)2ax + (1-k^2)a^2 = 0$$

$$y^2 + x^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} 2ax + a^2 = 0$$

$$y^2 + x^2 + 2x \times \frac{1+k^2}{1-k^2} a + \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 a^2 - \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 a^2 + a^2 = 0$$

$$y^2 + \left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 = a^2 \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - a^2$$

On a bien l'équation d'un cylindre dans l'espace, d'axe  $(Oz)$  et d'intersection avec  $(xOy)$  le cercle de centre  $\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} a, 0\right)$  et de rayon  $R$

$$\text{avec } R = a \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1}$$

4) On retrouve les équipotentielles circulaires .

On a tracé les lignes de champ des charges positives vers les négatives

On a tracé le plan  $(yOz)$  plan d'antisymétrie  
 $(xOy)$  plan de symétrie